

# EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDOS (X-FEM) PARA MEDIOS BIDIMENSIONALES FISURADOS TOTALMENTE ANISÓTROPAS

Gabriel Hattori<sup>1a</sup>, Ramón Rojas-Díaz<sup>1b</sup>, Andrés Sáez<sup>1c</sup>, Felipe García-Sánchez<sup>2</sup>, Natarajan Sukumar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Mecánica de los Medios Continuos. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Camino de los descubrimientos S/N, 41092-Sevilla

<sup>a</sup>E-mail: hattori@us.es ; <sup>b</sup>E-mail: rrojasdiaz@us.es ; <sup>c</sup>E-mail: andres@us.es

<sup>2</sup>Departamento de Ingeniería Civil, de Materiales y Fabricación, E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga. Doctor Ortiz Ramos, 29071-Málaga

E-mail: fgsanchez@uma.es

<sup>3</sup>Department of Civil and Environmental Department, One Shields Avenue, Davis, CA 95616. U.S.A.

E-mail: nsukumar@ucdavis.edu

## RESUMEN

El Método de los Elementos Finitos Extendido (X-FEM) ha sido empleado para resolver problemas de Mecánica de la Fractura en materiales con diversas leyes de comportamiento (por ejemplo, materiales isotropos, ortotropos, piezoeléctricos o magnetoelásticos). Para cada tipo de material, es necesario obtener las llamadas “funciones de enriquecimiento” que modelan el comportamiento de los campos de desplazamientos y tensiones en el entorno del vértice de la grieta. En este trabajo, dichas funciones han sido obtenidas para el caso de materiales totalmente anisotropos en forma matricial en función del formalismo de Stroh. La formulación propuesta es validada comparando los resultados obtenidos con algunos disponibles en la literatura.

## ABSTRACT

The Extended Finite Element Method (X-FEM) has been used to solve fracture mechanics problems in materials with different behavior laws, (e.g. isotropic, orthotropic, piezoelectric or magnetoelastoc materials). For each kind of material, is necessary to obtain the so called “enrichment functions” which model the behavior of the displacements and stress fields near the crack tip. In this work, these functions have been obtained for the case of totally anisotropic materials in matricial form in function of Stroh’s formalism. The proposed formulation is validated comparing the computed results with ones available in literature.

**PALABRAS-CLAVES:** X-FEM, Materiales Anisotropos, Funciones de enriquecimiento.

## 1. INTRODUCCIÓN

El uso extensivo de materiales compuestos, y la consiguiente necesidad del análisis de la integridad estructural de los mismos, ha provocado el desarrollo de diversas herramientas numéricas para el análisis de problemas de fractura en medios anisotropos, tales como el Método de los Elementos de Contorno (MEC) [1, 2] o el Método de los Elementos Finitos (MEF) [3].

Como es sabido, para el estudio de problemas de mecánica de la fractura, el MEF presenta como gran inconveniente la necesidad de que la grieta coincida con la superficie de separación entre elementos, con el consiguiente remallado cuando se quieren simular problemas de crecimiento de grietas. Asimismo, se hace necesario el empleo de elementos singulares alrededor del vértice de grieta. El Método de los Elementos Finitos Extendidos (X-FEM) solventa esas dificultades, incorporando ciertos

grados de libertad (en el marco de la Partición de la Unidad [4]) de los nodos pertenecientes a los elementos que contienen a la grieta. Este tipo de abordaje permite que la grieta no dependa de la malla, facilitando simulaciones de crecimiento de grieta.

Esta técnica se ha empleado con éxito para el análisis de materiales isotropos [5], bimateriales [6], ortotropos [7], piezoeléctricos [8] y magnetoelásticos [9]. En este trabajo se presenta una nueva formulación que permitirá el análisis de mecánica de la fractura en medios bidimensionales totalmente anisotropos. Para ello, se obtendrán nuevas funciones de enriquecimiento en función de las matrices definidas en el formalismo de Stroh. La gran exactitud de la formulación presentada se demostrará mediante la comparación con resultados disponibles en la literatura.

## 2. ECUACIONES BÁSICAS

La relación lineal elástica más general entre tensiones  $\sigma_{ij}$  y deformaciones  $\varepsilon_{kl}$  en un dominio elástico viene dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

donde  $C_{ijkl}$  es la matriz constitutiva del material, o ley de comportamiento, que presenta las siguientes relaciones de simetría:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2)$$

El tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  y el vector de desplazamientos  $u_i$  están relacionados mediante la expresión (3):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

donde se sabe que el tensor de deformaciones es simétrico debido a la igualdad en las derivadas cruzadas.

Por otra parte, la relación de equilibrio es:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (4)$$

donde  $b_i$  es el vector de fuerzas por unidad de volumen y el tensor de tensiones es simétrico:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

En medios anisótropos, se pueden obtener las soluciones en el alrededor del vértice de grieta de acuerdo con el formalismo de Stroh [10]. Si se utiliza un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen en el vértice de grieta, los campos de tensiones vienen dados por:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = (-1)^j \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \Re \left( \sum_{n=1}^2 K_n \sum_{m=1}^2 B_{im} B_{mn}^{-1} \frac{\delta_{j1}\mu_m + \delta_{j2}}{\sqrt{r(\cos\theta + \mu_m \sin\theta)}} \right) \quad (5)$$

mientras los desplazamientos pueden expresarse como:

$$u_i(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \Re \left( \sum_{n=1}^2 K_n \sum_{m=1}^2 A_{im} B_{mn}^{-1} \sqrt{r(\cos\theta + \mu_m \sin\theta)} \right) \quad (6)$$

donde  $K_n$  comprende los modos de fractura  $K_I$  y  $K_{II}$ , y  $\Re(x)$  representa la parte real de  $x$ .

En (5) y (6), los tensores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  y  $\mu_m$  dependen solamente de las propiedades del material, y pueden ser obtenidos resolviendo el siguiente problema de autovalores:

$$\left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M} & -\mathbf{L}^{-1} \\ \hline \mathbf{Z} - \mathbf{M}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M} & -\mathbf{M}^T \mathbf{L}^{-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m \\ \mathbf{B}_m \end{pmatrix} = \mu_m \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m \\ \mathbf{B}_m \end{pmatrix} \quad (\text{sin sumas en } m) \quad (7)$$

siendo  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{Z}$  los tensores definidos en el formalismo de Stroh, a partir de las propiedades del material, como:

$$\mathbf{Z} := \mathbf{C}_{1ij1}; \mathbf{M} := \mathbf{C}_{2ij1}; \mathbf{L} := \mathbf{C}_{2ij2} \quad (8)$$

## 3. FORMULACIÓN DE X-FEM Y FUNCIONES DE ENRIQUECIMIENTO

El método fue originalmente propuesto en [11–13], siendo utilizado principalmente para simular discontinuidades a través de un enriquecimiento de los elementos finitos usuales. Para ello, en una malla de elementos finitos, se añaden ciertos grados de libertad en un conjunto de nodos apropiados con el fin de modelar de manera precisa la discontinuidad introducida en el medio por la presencia de la grieta.

### 3.1. Formulación de X-FEM

Sea un dominio arbitrario discretizado en un número tal de elementos, que el número de nodos es  $N$ . Si dicho dominio contiene una grieta, el desplazamiento de un punto cualquiera  $\mathbf{x}$  que pertenezca al dominio considerado puede determinarse como [13]:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}^{\mathcal{H}}} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j + \sum_{k \in \mathcal{N}^{\mathcal{CT}}} N_k(\mathbf{x}) \sum_{\alpha} F_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k^{\alpha}, \quad (9)$$

donde  $N_i(\mathbf{x})$  es la función de forma de los elementos finitos, asociada al nodo  $i$ ,  $\mathbf{u}_i$  es el vector de los grados de libertad nodales en los elementos finitos clásicos, y  $\mathbf{a}_j$  y  $\mathbf{b}_k^{\alpha}$  son los grados de libertad adicionales que contienen la grieta.  $H(\mathbf{x})$  es la función Heaviside, que simula la discontinuidad en el campo de desplazamientos en ambas superficies de la grieta, mientras que  $F_{\alpha}(\mathbf{x})$  son las funciones de enriquecimiento en el vértice de grieta. El índice  $\alpha$  varía desde 1 hasta el número total de funciones de enriquecimiento en el vértice de grieta necesarias, que depende de la ley de comportamiento del material analizado.

La figura 1 ilustra los elementos enriquecidos entorno de la discontinuidad. Los elementos marcados con un círculo son enriquecidos con la función de Heaviside, mientras los elementos marcados con un cuadrado presentan funciones de enriquecimiento de vértice de grieta, con el fin de modelar el comportamiento asintótico en el entorno del vértice de grieta.

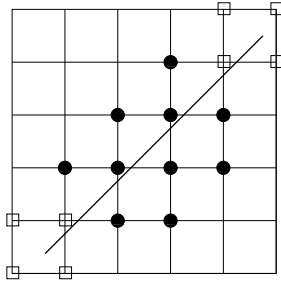


Figura 1: Nodos enriquecidos.

### 3.2. Funciones de enriquecimiento

Las funciones de enriquecimiento en el vértice de grieta se definen como el conjunto de funciones que permiten definir cualquier desplazamiento en el entorno de la grieta como combinación de las mismas. El campo de desplazamientos en el entorno del vértice de grieta para materiales anisótropos, fue definido en la ecuación (6).

Si se expande esta suma, el campo de desplazamiento puede ser escrito para un sólido bidimensional como:

$$u_1(r, \theta) = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [K_I (\Re\{A_{11}B_{11}^{-1}\beta_1 + A_{12}B_{21}^{-1}\beta_2\}) + K_{II} (\Re\{A_{11}B_{12}^{-1}\beta_1 + A_{22}B_{22}^{-1}\beta_2\})] \quad (10)$$

$$u_2(r, \theta) = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [K_I (\Re\{A_{21}B_{11}^{-1}\beta_1 + A_{22}B_{21}^{-1}\beta_2\}) + K_{II} (\Re\{A_{21}B_{12}^{-1}\beta_1 + A_{22}B_{22}^{-1}\beta_2\})] \quad (11)$$

donde:

$$\beta_i = \sqrt{\cos \theta + \mu_i \sin \theta} \quad (12)$$

y  $\mu_i$  son los autovalores con parte imaginaria positiva.

A partir de las ecuaciones (10) y (11), pueden definirse las siguientes funciones de enriquecimiento de vértice de grieta:

$$F_l(r, \theta) = \sqrt{r} \begin{pmatrix} \Re\{A_{11}B_{11}^{-1}\beta_1 + A_{12}B_{21}^{-1}\beta_2\} \\ \Re\{A_{11}B_{12}^{-1}\beta_1 + A_{12}B_{22}^{-1}\beta_2\} \\ \Re\{A_{21}B_{11}^{-1}\beta_1 + A_{22}B_{21}^{-1}\beta_2\} \\ \Re\{A_{21}B_{12}^{-1}\beta_1 + A_{22}B_{22}^{-1}\beta_2\} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Estas funciones de enriquecimiento obtenidas basadas en formalismo de Stroh son sencillas y pueden ser utilizadas de forma general para materiales anisótropos, como se verá en la próxima sección.

## 4. RESULTADOS

Para validar la formulación propuesta, se han resuelto varios problemas y los resultados obtenidos se han com-

parado con los obtenidos por [1, 2] mediante el empleo del Método de los Elementos de Contorno. En este trabajo, la computación de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) se ha realizado mediante la Integral de Interacción [14].

En todas las simulaciones se emplearon elementos cuadriláteros lineales. Se consideraron 2 x 2 puntos de Gauss en los elementos no enriquecidos, mientras que para los elementos enriquecidos no particionados se usaron 5 x 5 puntos de Gauss. Los elementos particionados, se subdividieron en triángulos, y se emplearon 3 puntos de Gauss en cada uno de ellos.

### 4.1. Grieta centrada en una placa ortótropa

El primer problema analizado es el de una placa cuadrada ( $h/w = 1$ ) con una grieta centrada de longitud  $2a$ , sometida a una tracción uniforme en dos lados opuestos, tal y como ilustra la figura 2.

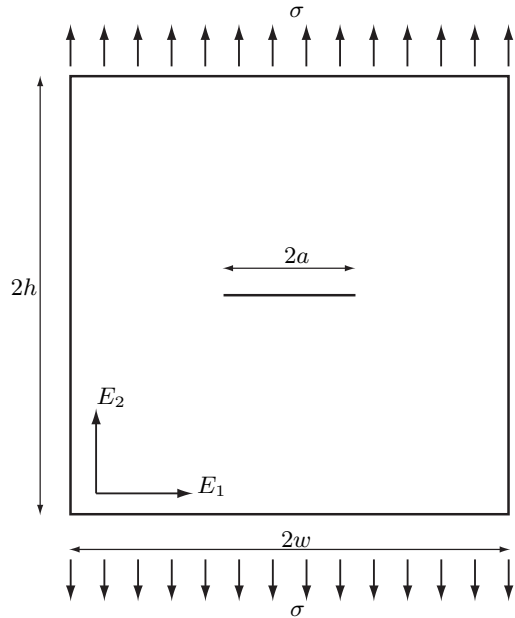


Figura 2: Placa cuadrada con grieta centrada bajo una tracción uniforme.

El problema se ha resuelto para distintas propiedades del material. Habiéndose fijado los valores del módulo de elasticidad transversal  $G_{12} = 6 \text{ GPa}$  y el coeficiente de Poisson  $\nu_{12} = 0,03$ , los módulos de Young  $E_1$  y  $E_2$  se calculan con las expresiones  $E_1 = G_{12}(\varphi + 2\nu_{12} + 1)$  y  $E_2 = E_1/\varphi$ , siendo  $\varphi$  una variable que determina la relación entre los módulos de elasticidad. Se han comparado los resultados obtenidos con los presentados en [1, 2] mediante el uso del Método de los Elementos de Contorno.

El FIT en modo I normalizado ( $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$ ), para diversos valores de  $\varphi$  se muestran en la figura 3 para dos mallas distintas. La relación entre la longitud de grieta y el lado de la placa es  $a = 0,2w$ .

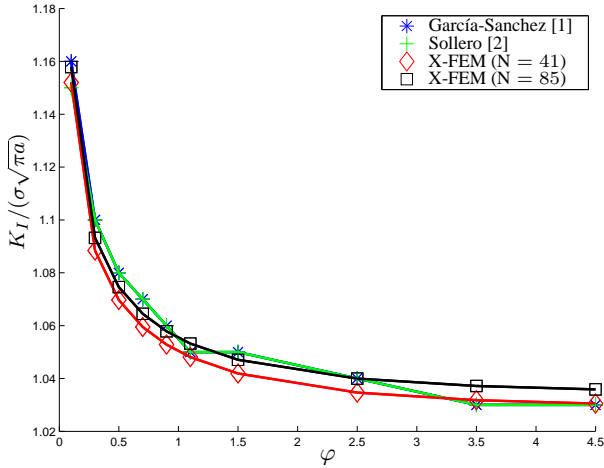


Figura 3: Resultados para la placa cuadrada con grieta centrada.

Se observa una buena correlación entre los datos obtenidos con MEC y los resultados calculados con la formulación presentada en este trabajo.

#### 4.2. Doble grieta de borde en una placa anisótropa

En este segundo ejemplo se analiza una placa cuadrada ( $h/w = 1$ ) con doble grieta de borde, sometida a tensión uniforme en los dos lados opuestos, tal y como se muestra en la figura 4.

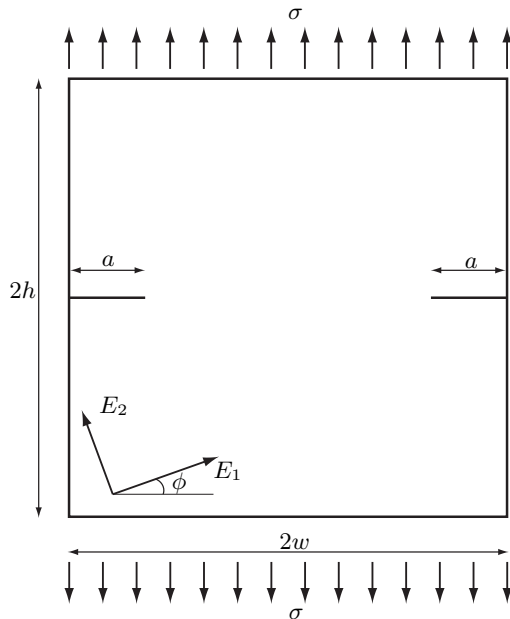


Figura 4: Placa cuadrada con doble grieta de borde bajo una tracción uniforme.

La placa es un laminado compuesto simétrico formado por cuatro láminas de grafito-epoxy, con las siguientes propiedades elásticas:  $E_1 = 144,8 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 11,7 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = 9,66 \text{ GPa}$  y  $\nu_{12} = 0,21$ . Se ha variado la orientación de las fibras desde  $\phi = 0$  a  $\phi = 90$ , para analizar la influencia en los FIT.

Considerando una longitud de grieta  $a = 0,5w$ , se ha obtenido la figura 5 que representa los valores de FIT en

modo I normalizados por  $K_I / (\sigma \sqrt{\pi a})$  en función de la orientación de las fibras  $\phi$ , verificándose en todos los casos la exactitud de los resultados presentados en este trabajo, con respecto a trabajos anteriores.

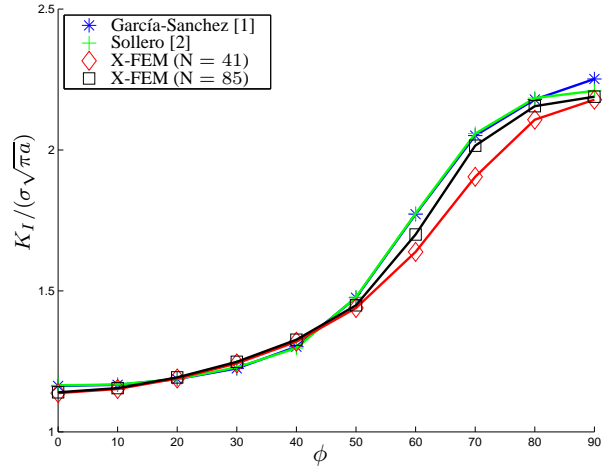


Figura 5: Resultados para la placa cuadrada con doble grieta de borde.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha desarrollado una formulación basada en el Método de los Elementos Finitos Extendidos para la resolución de problemas de mecánica de la fractura elástica lineal en medios bidimensionales anisótropos. Se obtuvieron las nuevas funciones de enriquecimiento necesarias a partir de los campos de desplazamientos definidos mediante el formalismo de Stroh, de modo que las funciones resultantes son sencillas y compactas.

La precisión de la formulación presentada se demuestra mediante la obtención de los FIT mediante el Método de la Integral de Interacción, y posterior comparación de resultados con los obtenidos en trabajos previos [1, 2].

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación español, mediante el proyecto DPI2010-21590-C02-02.

## Referencias

- [1] F. García-Sánchez, A. Sáez, and J. Domínguez, "Traction boundary elements for cracks in anisotropic solids," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 28, pp. 667–676, 2004.
- [2] P. Sollero, *Fracture analysis of anisotropic composite laminates by the boundary element method*. PhD thesis, Wessex Institute of Technology, UK, 1994.
- [3] S. K. Chan, I. S. Tuba, and W. K. Wilson, "On the finite element method in linear fracture mechanics,"

- Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, pp. 1–17, 1970.
- [4] I. Babuska and J. Melenk, “The partition of unity method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, pp. 607–632, 1997.
- [5] M. Fleming, Y. A. Chu, B. Moran, and T. Belytschko, “Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 1483–1504, 1997.
- [6] A. Mensk and S. P. A. Bordas, “Numerically determined enrichment functions for the extended finite element method and applications to bi-material anisotropic fracture and polycrystals,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, pp. 805–828, 2010.
- [7] A. Asadpoure and S. Mohammadi, “Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, pp. 2150–2172, 2007.
- [8] E. Béchet, M. Scherzer, and M. Kuna, “Application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, pp. 1535–1565, 2009.
- [9] R. Rojas-Díaz, N. Sukumar, A. Sáez, and F. . García-Sánchez, “Fracture in magnetoelastic materials using the extended finite element method,” *Submitted for publication*, 2010.
- [10] A. Stroh, “Dislocation and cracks in anisotropic elasticity,” *Philosophical magazine*, vol. 3, pp. 625–646, 1958.
- [11] T. Belytschko and T. Black, “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601–620, 1999.
- [12] J. Dolbow, *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*. PhD thesis, Northwestern University, USA, 1999.
- [13] N. Mões, J. Dolbow, and T. Belytschko, “A finite element method for crack growth without remeshing,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131–150, 1999.
- [14] B. Rao and M. Kuna, “Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded magnetoelastic materials,” *International Journal of Fracture*, vol. 153, pp. 15–37, 2008.